

APÉNDICE E

E. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y MÉTRICAS DE LAS IMÁGENES DIGITALES

Como se indicó en el Capítulo 1, una imagen digital consta de una serie de píxeles dispuestos en una matriz rectangular cuyos elementos son números enteros, que corresponden a los niveles de cuantización en la escala de grises. Con esta disposición podemos considerar que las imágenes digitales presentan una serie de propiedades tanto métricas como topológicas, que requieren su consideración para el procesamiento posterior (Ajenjo 1993, Fu y col. 1988, Sonka y col. 1995).

a) Propiedades Topológicas

Las propiedades topológicas de las imágenes son aquellas que son invariantes a transformaciones debidas al estiramiento de una hoja de goma. Imaginemos un pequeño balón de goma con objetos pintados en él, las propiedades topológicas son aquellas que son invariantes al inflado del balón de goma. El inflado no cambia la contigüidad de las partes del objeto ni el número de huecos en las regiones. Estas propiedades han sido consideradas ampliamente en el Capítulo 9.

b) Vecindad

Se dice que todo píxel p , de coordenadas (x,y) tiene cuatro píxeles que establecen con él una relación de vecindad horizontal o vertical, que son:

Horizontal: $(x-1,y)$ y $(x+1,y)$ Vertical: $(x,y-1)$ y $(x,y+1)$

Estos 4 píxeles definen lo que se conoce como *entorno de vecindad-4* y nos referimos a ellos como $E_4(p)$.

Los cuatro vecinos diagonales de p tienen coordenadas

$$(x-1,y-1), (x+1,y-1), (x-1,y+1) \text{ y } (x+1,y+1)$$

y nos referimos a ellos como $E_D(p)$. Estos píxeles junto con los $E_4(p)$ se llaman los *vecinos-8* de p y se denotan como $E_8(p)$.

Naturalmente, existen las excepciones dadas cuando el píxel (x,y) es un punto del borde de la imagen, en cuyo caso algunos de los vecinos definidos anteriormente no existen.

$(x-1,y-1)$	$(x,y-1)$	$(x+1,y-1)$
$(x-1,y)$	(x,y)	$(x+1,y)$
$(x-1,y+1)$	$(x,y+1)$	$(x+1,y+1)$

c) *Conectividad*

Sea V el conjunto de valores de intensidad de los píxeles que se permiten estén adyacentes; por ejemplo, si sólo se desea que exista conectividad entre los píxeles con intensidades 80,81 y 83, entonces $V = \{80,81,83\}$. Consideremos tres tipos básicos de conectividad:

Conectividad-4. Dos píxeles p y q con valores de V están *4-conectados* si q está en el conjunto $E_4(p)$.

Conectividad-8. Dos píxeles p y q con valores de V están *8-conectados* si q está en el conjunto $E_8(p)$.

Conectividad-m (mixta). Dos píxeles p y q con valores de V están m -conectados si q está en el conjunto $E_4(p)$ o q está en $E_D(p)$ y $E_4(p) \cap E_4(q) = \emptyset$.

Un píxel p es contiguo a otro píxel q si están conectados. Se puede definir la adyacencia-4, -8 o -m, dependiendo del tipo de conectividad especificada. Dos subconjuntos imagen S_1 y S_2 son contiguos si algún píxel de S_1 es contiguo a algún píxel de S_2 .

Un *camino* desde el píxel p con coordenadas (x,y) hasta un píxel q con coordenadas (s,t) es una secuencia de varios píxeles con coordenadas,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

donde $(x_0, y_0) = (x, y)$ y $(x_n, y_n) = (s, t)$, (x_i, y_i) son adyacentes a (x_{i-1}, y_{i-1}) , con $1 \leq i \leq n$, y n es la longitud del camino. Se pueden definir caminos-4, -8 o -m dependiendo del tipo de adyacencia usada.

Si p y q son píxeles de un subconjunto de imagen S , entonces p está conectado a q en S si existe un camino desde p hasta q formado de píxeles pertenecientes a S . Dado un píxel p cualquiera de S , el conjunto de píxeles de S que están conectados a p se llama componente conectado de S . Se deduce que dos píxeles cualesquiera de un componente conectado están a su vez conectados entre sí y que los componentes conectados distintos son disjuntos.

Un *camino* simple es un camino sin píxeles repetidos y un camino cerrado es un camino simple en el cual el primer píxel es un vecino del último.

Una *región* es un conjunto de píxeles en la cual hay un camino entre cualquier par de sus píxeles y todos los píxeles de este camino pertenecen al conjunto.

Si hay un camino entre dos píxeles de la imagen esos píxeles se denominan *contiguos*. Alternativamente, podemos decir que una región es el conjunto de píxeles donde cada par de píxeles en el conjunto es contiguo. La relación “*ser contiguo*” es reflexiva, simétrica y transitiva y por tanto define una descomposición del conjunto (en nuestro caso la imagen) en clases de equivalencia, que serán las regiones.

Supongamos que R_j son regiones disjuntas en la imagen que se creó con la relación *ser contiguo*, y además suponer para evitar casos especiales, que esas regiones no tocan los límites de la imagen. Sea la región R la unión de todas las regiones R_j y el conjunto R^c el complementario de la región R con respecto a la imagen. El subconjunto de R^c que es contiguo con los límites de la imagen se denomina el *fondo* y el resto del conjunto complementario R^c se denominan *huecos*. Si no hay huecos en una región decimos que es *simplemente contigua* y con huecos *múltiplemente contigua*.

Según lo anterior, el concepto de región utiliza sólo la propiedad “*ser contigua*”. No obstante, suele ser habitual llamar a algunas regiones en la imagen *objetos*; el proceso que dice qué regiones en la imagen corresponden a los objetos de la escena, se llama *segmentación* de la imagen y se estudió en el Capítulo 7.

Un sencillo ejemplo para diferenciar estos conceptos lo constituye el texto impreso en esta misma página, donde las letras son los objetos, las áreas rodeadas por las propias letras son los huecos, por ejemplo el área dentro de la letra ‘o’. El resto de las partes blancas del papel es el fondo.

Las definiciones de vecindad y contigüidad en las imágenes digitales crean algunas paradojas dignas de mención. La figura E.1 muestra dos segmentos de líneas digitales con 45° de inclinación. Si utilizamos vecindad-4, las líneas no son contiguas en cada uno de sus puntos. Aun surge un conflicto mayor al considerar las líneas perpendiculares a la diagonal, las líneas de la parte superior derecha tienen un punto común y por tanto se intersectan, sin embargo las líneas de la parte inferior izquierda no se intersectan puesto que no tienen ningún punto en común.

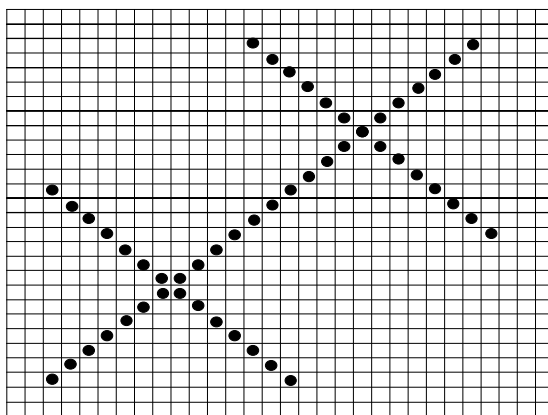


Figura E.1 Líneas digitales

Por otro lado, se sabe de la geometría Euclídea que cada curva cerrada (por ejemplo un círculo) divide el plano en dos regiones, tal y como se muestra en la figura E.2. Esto implica que la parte interior y la exterior de la curva constituyen una única región porque todos los píxeles de la línea pertenecen a esa única región. Esto resulta ser una nueva paradoja.

Una posible solución a estas paradojas consiste en tratar los objetos utilizando vecindades-4 y el fondo vecindades-8 o viceversa. Un tratamiento más riguroso sobre el tratamiento de imágenes digitales y su solución para imágenes binarias e imágenes con más niveles de gris se puede encontrar en Pavlidis (1977) o Horn (1986). Estos

problemas son típicos en rejillas con celdas cuadradas, si las celdas fueran hexagonales con una geometría de panal de abejas estos problemas estarían resueltos. Sin embargo, aparecen otros, tales como la dificultad para expresar la transformada de Fourier en ellos. Además muchos dispositivos tienen una estructura de celdas cuadradas.

La *frontera* de una región es otro concepto importante en el análisis de imágenes. La frontera de la región R es el conjunto de píxeles dentro de la región que tienen uno o más vecinos fuera de R . Ésta es una definición intuitiva al considerar la frontera de una región como un conjunto de puntos en el límite de la misma. Esta definición está referida a lo que se conoce como *frontera interna* para distinguirla de la *frontera externa* que es la frontera del fondo (por tanto su complemento) de la región.

El *borde* es otro concepto más. El borde es una propiedad local de un píxel y su vecindad inmediata, se trata de un vector dado por una magnitud y dirección, estudiado exhaustivamente en el Capítulo 6. Existe una diferencia substancial entre frontera y borde. La frontera es un concepto global relacionado con la región, mientras el borde expresa propiedades locales de una función de imagen. La frontera y los bordes están relacionados entre sí. Una posibilidad para encontrar fronteras consiste en encadenar los puntos de borde con un gradiente elevado.

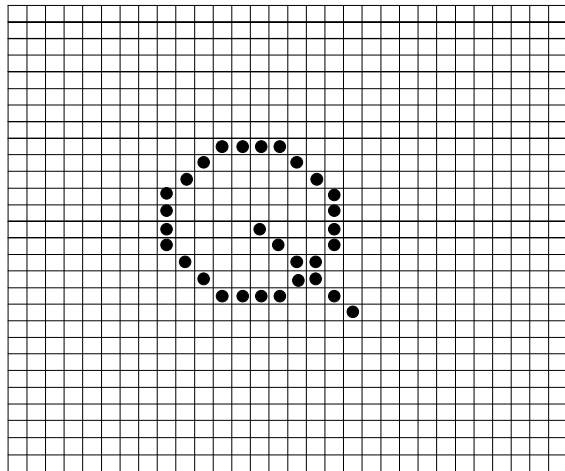


Figura E.2 Conexión de dos regiones por una línea limitada por una curva cerrada sin intersección con la curva

d) Medidas de distancias

La distancia entre puntos con coordenadas (x,y) y (s,t) puede ser definida de varias formas diferentes:

Distancia Euclídea: $D_e(p,q) = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}$

Distancia D_4 (llamada distancia de *bloques de casas*): $D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$

Distancia D_8 (llamada distancia de *bloques de ajedrez*):

$$D_8(p, q) = \max\{|x - s|, |y - t|\}.$$